**Дата:20.02.21г**

Написать конспект

**Показательные уравнения и неравенства**

Показательными уравнениями и неравенствами считают такие уравнения и неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения ах = аb, где а > 0, а ≠ 1, х – неизвестное. Это уравнение имеет единственный корень х = b, так как справедлива следующая теорема:

Теорема. Если а > 0, а ≠ 1 и ах1 = ах2, то х1 = х2.

Обоснуем рассмотренное утверждение.

Предположим, что равенство х1 = х2 не выполняется, т.е. х1 < х2 или х1 = х2. Пусть, например, х1 < х2. Тогда если а > 1, то показательная функция у = ах возрастает и поэтому должно выполняться неравенство ах1 < ах2; если 0 < а < 1, то функция убывает и должно выполняться неравенство ах1 > ах2. В обоих случаях мы получили противоречие условию ах1 = ах2.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1.

Решить уравнение 4 ∙ 2х = 1.

Решение.

Запишем уравнение в виде 22∙ 2х = 20 – 2х+2 = 20, откуда получаем х + 2 = 0, т.е. х = -2.

Ответ. х = -2.

Задача 2.

Решить уравнение 23х∙ 3х = 576.

Решение.

Так как 23х= (23)х= 8х, 576 = 242, то уравнение можно записать в виде 8х ∙ 3х = 242 или в виде 24х= 242.

Отсюда получаем х = 2.

Ответ. х = 2.

Задача 3.

Решить уравнение 3х+1 – 2∙3х - 2 = 25.

Решение.

Вынося в левой части за скобки общий множитель 3х - 2, получаем 3х - 2 ∙ (33 – 2) = 25 – 3х - 2∙ 25 = 25,

откуда 3х - 2 = 1, т.е. х – 2 = 0, х = 2.

Ответ. х = 2.

Задача 4.

Решить уравнение 3х = 7х.

Решение.

Так как 7х ≠ 0, то уравнение можно записать в виде 3х/7х = 1, откуда (3/7)х = 1, х = 0.

Ответ. х = 0.

Задача 5.

Решить уравнение 9х – 4 ∙ 3х – 45 = 0.

Решение.

Заменой 3х = а данное уравнение сводится к квадратному уравнению а2– 4а – 45 = 0.

Решая это уравнение, находим его корни: а1 = 9, а2 = -5, откуда 3х = 9, 3х = -5.

Уравнение 3х = 9 имеет корень 2, а уравнение 3х = -5 не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ. х = 2.

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств ах > аb или ах < аb. Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции.

Рассмотрим некоторые задачи.

Задача 1.

Решить неравенство 3х < 81.

Решение.

Запишем неравенство в виде 3х < 34. Так как 3 > 1, то функция у = 3х является возрастающей.

Следовательно, при х < 4 выполняется неравенство 3х < 34, а при х ≥ 4 выполняется неравенство 3х ≥ 34.

Таким образом, при х < 4 неравенство 3х < 34 является верным, а при х ≥ 4 – неверным, т.е. неравенство
3х < 81 выполняется тогда и только тогда, когда х < 4.

Ответ. х < 4.

Задача 2.

Решить неравенство 16х +4х – 2 > 0.

Решение.

Обозначим 4х = t, тогда получим квадратное неравенство t2 + t – 2 > 0.

Это неравенство выполняется при t < -2 и при t > 1.

Так как t = 4х, то получим два неравенства 4х< -2, 4х> 1.

Первое неравенство не имеет решений, так как 4х> 0 при всех х € R.

Второе неравенство запишем в виде 4х> 40, откуда х > 0.

Ответ. х > 0.

Задача 3.

Графически решить уравнение (1/3)х= х – 2/3.

Решение.

1) Построим графики функций у = (1/3)хи у = х – 2/3.

2) Опираясь на наш рисунок, можно сделать вывод, что графики рассмотренных функций пересекаются в точке с абсциссой х ≈ 1. Проверка доказывает, что

х = 1 – корень данного уравнения:

(1/3)1= 1/3 и 1 – 2/3 = 1/3.

Иными словами, мы нашли один из корней уравнения.

3) Найдем другие корни или докажем, что таковых нет. Функция (1/3)хубывающая, а функция у = х – 2/3 возрастающая. Следовательно, при х > 1 значения первой функции меньше 1/3, а второй – больше 1/3; при х < 1, наоборот, значения первой функции больше 1/3, а второй – меньше 1/3. Геометрически это означает, что графики этих функций при х > 1 и х < 1 «расходятся» и потому не могут иметь точек пересечения при х ≠ 1.

Ответ. х = 1.

!!! Заметим, что из решения этой задачи, в частности, следует, что неравенство (1/3)х> х – 2/3 выполняется при х < 1, а неравенство (1/3)х< х – 2/3 – при х > 1.